

Carl von Ossietzky
**Universität
Oldenburg**

Risikomanagement für Finanzdienstleister (M.Sc.)

Quantitatives Risikomanagement

Daniel Dubischar

 Center für
lebenslanges
Lernen



Berufsbegleitender Masterstudiengang

Risikomanagement für Finanzdienstleister (M.Sc.)



Dr. Daniel Dubischar

Quantitatives Risikomanagement

Impressum

Autor: Dr. Daniel Dubischar

Herausgeber: Carl von Ossietzky Universität Oldenburg - Center für lebenslanges Lernen C3L

Redaktion: Uda Lübben

Layout: Andreas Altvater, Franziska Buß-Vondrlik

Auflage: 2. überarbeitete u. erweiterte Auflage, Erstausgabe 2020

Copyright: Vervielfachung oder Nachdruck auch auszugsweise zum Zwecke einer Veröffentlichung durch Dritte nur mit Zustimmung der Herausgeber, 2019-2020

Oldenburg, September 2020

Dr. Daniel Dubischar
Aktuar DAV, CERA



Arbeitsschwerpunkte

Freier Berater, vorrangig in den Bereichen

- Enterprise Risk Management, qualitative wie quantitative Elemente des Risikomanagements
- Financial and actuarial modeling,
- (Re)Insurance Pricing, Valuation, M&A,
- Project and people management, coaching, troubleshooting

Werdegang

Diplomstudium der Mathematik in Tübingen, Pisa und Bremen, mit Promotion (2000) im Bereich der zufälligen dynamischen Systeme. Spätere Ausbildung zum Aktuar DAV und CERA (Certified Enterprise Risk Actuary).

- Von 1999 bis 2005 bei der Hannover Rück als Aktuar im Bereich der Lebensrückversicherung angestellt, in Hannover (Deutschland) und Paris (Frankreich).
- Von 2005 bis 2011 bei der PartnerRe in Zürich (Schweiz), zunächst als Head of Life Pricing und dann als Group Actuary Life, verantwortlich für Reserven, actuarielle Standards, Risikotheorien und Kapitalallokation.
- 2011 bis 2016 bei der SCOR in Zürich, als Head of Group Financial Modeling and Risk Analysis verantwortlich für das interne Modell und die quantitative Risikoanalyse und die erfolgreiche Solvency II Model (Pre)Application, ab 2014 Senior Advisor to the Group CRO, für strategische Fragestellungen und beispielsweise das Economic Value Framework.
- Seit 2017 freier Berater

Projekte

Seit 2016 Lehrbeauftragter im Fachbereich Mathematik in Oldenburg mit Vorlesungen im Bereich des Quantitativen Risikomanagements, der Risikotheorie und Finanzrisikomodellierung.

Seit 2018 Vorsitzender des gemeinnützigen Vereins „Mathematik in Bremen! e.V.“ zur Mathematik-Talentförderung im Land Bremen.

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG	7
0 EINIGE GRUNDLAGEN	13
0.1 Reellwertige Zufallsvariablen und ihre Verteilung	13
0.2 Zwei und mehr Variablen	20
0.3 Erwartungswert und Varianz, Korrelation, Kovarianz	25
0.4 Selbstkontrolle	27
1 RISIKODEFINITION UND RISIKOMASSE	30
1.1 Risikodefinition	30
1.2 Arten von Risikomaßen	32
1.2.1 Faktorbasierte Risikomaße	32
1.2.2 Verteilungsbasierte Risikomaße.....	33
1.2.3 Szenariobasierte Risikomaße.....	34
1.3 Definition des Risikomaßes	35
1.4 Beispiele für Risikomaße	37
1.4.1 Value-at-Risk	43
1.4.2 Tailvalue-at-Risk	44
1.4.3 Expected Shortfall.....	46
1.5 Am Erwartungswert zentrierte Versionen	46
1.6 Analytische Darstellungen	47
1.6.1 VaR und ES für die Normalverteilung.....	48
1.6.2 VaR und ES für die Lognormalverteilung	49
1.7 Ergänzende und weiterführende Bemerkungen	50
1.7.1 Ergänzung zum Verhältnis von TVaR und Expected Shortfall .	50
1.7.2 Konvexe Risikomaße.....	52
1.7.3 Konvergenz von Simulationen zur Bestimmung von Risikomaßen	52
2 ABHÄNGIGKEIT UND DIVERSIFIKATION	55
2.1 Formen der Abhängigkeit	55
2.2 Maße für Abhängigkeit	57
2.2.1 Kovarianz und Korrelation	57
2.2.2 Rangkorrelationen.....	58
2.2.2.1 Spearman's Rho	58
2.2.2.2 Kendall's Tau	62
2.2.3 Exkursion: Tail dependencies.....	64
2.3 Diversifikation	67
2.4 Textauszüge zu Diversifikation	69
2.5 Weiterführende Bemerkungen	70

3	COPULAS	73
3.1	Definition und Satz von Sklar	73
3.2	Fundamentale Copulas	75
3.2.1	Unabhängigkeitscopula („Independence Copula“)	75
3.2.2	Obere Fréchet-Höfding Schranke	76
3.2.3	Untere Fréchet-Höfding Schranke	76
3.3	Implizite Copulas	77
3.3.1	Gaußsche Copula	77
3.3.2	t-Copula	78
3.4	Archimedische Copulas	79
3.4.1	Gumbel-Copula	80
3.4.2	Clayton-Copula	80
3.4.3	Frank Copula.....	81
3.5	Weiterführende Bemerkungen	82
3.5.1	Höhere Dimensionen	82
4	MONTE CARLO METHODEN FÜR RISIKOMASSE UND ABHÄNGIGKEITEN	86
4.1	Simulation von Zufallszahlen mit vorgegebener Verteilung	87
4.2	Value-at-Risk und Expected Shortfall	90
4.2.1	Risikomaß Value-at-Risk.....	91
4.2.2	Risikomaß Expected Shortfall	93
4.3	Monte Carlo Simulation und Copulas	94
4.3.1	Generelle Konstruktion.....	95
4.3.2	Für archimedische Copulas	97
4.3.3	Simulation von Copulas und Randverteilungen	100
4.4	Anwendung im Unternehmen	101
5	BEWERTUNG, WERTSCHÖPFUNG, KAPITAL UND KAPITALALLOKATION	106
5.1	Wert, Wertschöpfung und Kapital	106
5.1.1	Die Bewertung	106
5.1.2	Wertveränderung.....	109
5.2	Verfügbares und benötigtes Kapital	110
5.2.1	Kapital in verschiedenen Sichtweisen.....	110
5.2.2	Die Kapitalkosten in Form einer Risikomarge	112
5.3	Ein vereinfachtes Beispielunternehmen	114
5.4	Performance	121
5.5	Kapitalallokation	123
5.5.1	Definition der Kapitalallokation.....	124
5.5.2	Proportionale Allokation	126

5.5.3	Euler Allokation	126
5.5.4	RoRAC Verträglichkeit.....	131
5.6	Weiterführende und ergänzende Bemerkungen	133
6	UNTERNEHMENSSTEUERUNG UND AUFSICHTSRECHT	138
6.1	Die BaFin und der europäische Kontext.....	138
6.2	Solvency II und Basel III.....	139
6.2.1	Beispiel: Solvency II	140
6.3	Enterprise risk management mit Quantitativen Elementen	143
6.4	Ökonomisches Reporting am Beispiel von Versicherungen	145
6.5	Weiterführendes	148
7	LITERATURVERZEICHNIS	151

EINLEITUNG

Ob man Risiken mag oder nicht: Sie sind da und lassen sich nicht vollständig umgehen. Wenn der Begriff auch oft negativ besetzt ist, sind Risiken nicht an sich schlecht, und Unsicherheit ist oft von Vorteil.

Im mathematischen Sinne ist das Risiko in einem Zufallsexperiment die mögliche Abweichung eines Ergebnisses von der Erwartung, Im finanzwirtschaftlichen Sinne ist es die Veränderung eines Finanzwertes von der Erwartung bei Unsicherheit. In beiden Fällen wird zunächst nicht unterschieden, ob es sich um eine positive oder negative Abweichung handelt.

Üblicherweise lassen sich mit der Übernahme von Finanz- und Versicherungsrisiken Gewinne erzielen – dabei ist wiederum die Sichtweise relevant, wie man einen Gewinn definiert.

Dem Risikomanagement liegt zugrunde, dass man Risiken überhaupt erkennt. Nach der Risiko-Identifikation erfolgt die qualitative und quantitative Einordnung. Anschließend werden Risiken nach gewissen Regeln ge-„managed“, also wissentlich eingegangen oder vermieden, erhöht oder reduziert.

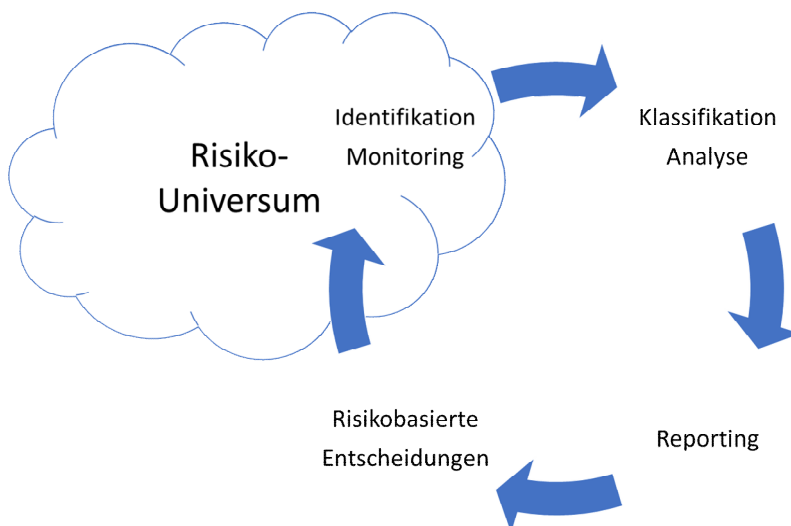


Abbildung 1: Abstrahierter Risikomanagement-Zyklus

Das quantitative Risikomanagement bildet den theoretischen Rahmen, um Risiken zu quantifizieren und Portefeuilles von Risiken zu analysieren und zu steuern.

Für jedwede Finanzunternehmung ist es wichtig, sich ein robustes Risikomanagement zu definieren und im Kern der Unternehmung zu verankern. Das gilt genauso für alle Unternehmungen – aber in Nicht-Finanzunternehmen liegen die Risiken häufig in Bereichen, die nicht natürlich „quantifizierbar“ sind, oder auch schlicht nicht aktiv zu steuern. Dort liegen die Kriterien eher in der Erkennung der Risiken, deren eher qualitativer „Bewertung“, zum Beispiel als „nicht bedrohlich“ oder „bedrohlich“, und anschließender Vorsorge.

Für ein Finanzunternehmen müssen die Metriken zur Risikomessung festgelegt werden, sowie die Risikopräferenzen und die Risikotoleranzen. Dies wird dann mit Prozessen komplettiert, wie und in welchen Frequenzen oder aufgrund welcher Beobachtungen die entsprechenden Kennziffern produziert und aktualisiert werden, wie sie berichtet und dokumentiert werden, und welche Entscheidung auf welcher Ebene getroffen werden darf, beziehungsweise muss. Dieses Regelwerk bildet den Kern der wertorientierten Risikosteuerung.

Wichtig ist, Risiken als Ganzheit zu begreifen, und als zufällige Änderung in einer vorgegebenen Zeitspanne.

Beispiel 1: Die Risiken eines Kredits

Bevor ein Kredit gewährt wird, muss man den Wert dieser Zusage bestimmen. Zunächst wird Zeitwert von Geld bestimmt, aber dann kommen verschiedene Risiken dazu, die mitbewertet werden müssen:

Zum einen gibt es die Möglichkeit des Eintritts von Zahlungsverzögerungen. Das kann zum einen zu Liquiditätsengpässen führen, zum anderen ändert sich der Zeitwert des Geldes. Dann besteht die Möglichkeit des Ausfalls, und der sogenannte *loss given default*, die Höhe des Verlusts bei Ausfall. Falls das Eigenkapital in einer anderen Währung als der Kredit ermittelt wird, kommen Währungsrisiken hinzu, weil sich der Wert mit den Währungskursen bewegt. Zudem hat der Kredit möglicherweise Abhängigkeiten zum restlichen Portefeuille – halten wir vielleicht Aktien der Firma, der wir den Kredit gewähre? Dazu kommen auch operationelle Risiken, wie Gesetzesänderungen oder schlechte Vertragstexte, oder Reputationsrisiken, die schwer zu quantifizieren, aber nicht vernachlässigbar sind.

Wenn man einige Risiken hiervon weitergeben kann, kommen dann wiederum andere hinzu – nehmen wir das Beispiel eines Hedges: Wenn wir das Basisrisiko absichern, kommt vielleicht wieder ein Ausfallrisiko des Risikoträgers hinzu oder eine Abhängigkeit mit anderen Risiken im Portefeuille.

Wenn es gelänge, alle Risiken eines Unternehmens zu erkennen und gesamthaft zu quantifizieren, so könnten wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wertveränderung des Unternehmens in einem vorgegebenen Zeitraum erstellen. Dort wäre abzulesen, wie wahrscheinlich ein Jahresgewinn oder Jahresverlust einer gewissen Höhe ist, wie hier in Abbildung 2. In dieser Abbildung sind Verluste (wie in Finanzberichten gewohnt) negativ, und Gewinne positiv. Der Erwartungswert dieser Verteilung ist der „erwartete Gewinn“ des Jahres. Der Gewinn und die Streuung um den Gewinn sind interessant für die Anleger.

Auf der linken Seite finden wir Jahresverluste. Die Verluste können so hoch sein, dass sie die Existenz des Unternehmens bedrohen. Sicherlich kennen Sie schon den *Value-at-Risk*. Dort, aber auch „links“ davon sollten Kreditgeber, die Aufsicht und natürlich auch die Geschäftsführung besonders hinschauen: Gegen diese Verluste muss ausreichendes Eigenkapital hinterlegt werden. Neben der *Höhe der Eigenkapitalunterlegung* ist für die Unternehmensführung (einschließlich Vorstand und Aufsichtsrat), für mögliche Anleger und Investoren die strategische, gewinn-

bringende *Allokation des Kapitals* wichtig. Systematische Verluste oder brachliegendes Kapital dienen der Nachhaltigkeit nicht, und haben Auswirkungen auf Teile oder die gesamte Gewinn- und Verlustverteilung.

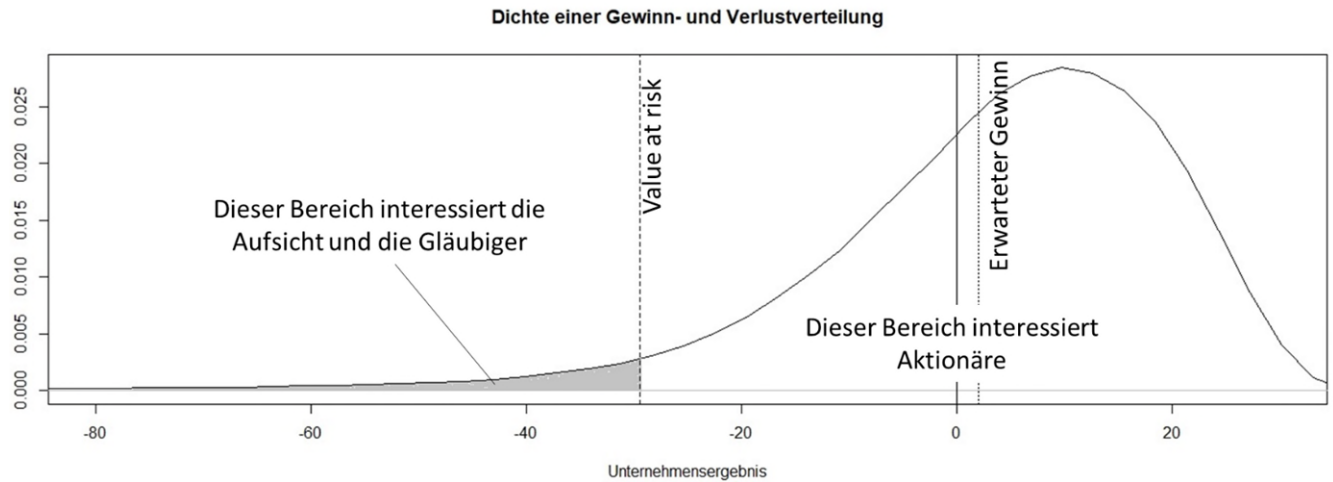


Abbildung 2: Schematische Gewinn- und Verlustverteilung eines Unternehmens

Spätestens hier sehen wir, dass Risikomanagement und Wertschöpfung im Unternehmen untrennbar sind. Im QRM wird das Risikomanagement als quantitative Disziplin verstanden, die die Mittel der Mathematik – und daraus insbesondere die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik – einsetzt.

Zur erweiterten Disziplin des QRM gehört auch die Modellierung von Risiken sowie die Bewertung von Risiken. Mit der Möglichkeit, komplexe Produkte zu entwickeln – vorrangig durch den Fortschritt in der Computertechnik – entwickelte sich auch die Komplexität der Modelle. Wenn besonders schnell Handel getrieben werden kann, oder besonders schnell auf Indikatoren reagiert wird, oder riesige Datenmengen zur Bewertung herangezogen werden, ist die Definition der Modelle, die Analyse der Stärken und Schwächen der Modelle und das Verständnis der getroffenen Annahmen und Voraussetzungen überlebenswichtig für die Unternehmung. Zu den Ursachen der Finanzkrise 2007+ (der sogenannte Credit Crunch), die auch heute noch ihre Auswirkungen zeigt, gehörte auch eine ungerechtfertigte Modellgläubigkeit.

Exkurs 1: Modelle

Modelle können, wenn sie nicht ausreichend beschrieben und verstanden sind, außerhalb ihrer natürlichen Grenzen großen Schaden anrichten, der dann a posteriori immer sehr gut mit dem Versagen der wesentlichen Prozesse, Konzepte und Methoden erklärt werden kann:

- Qualität der Daten
- Gültigkeit der Annahmen
- Validierung der gewählten Methoden

- Validierung der Modellumsetzung
 - Gültigkeitsbereich der möglichen Ergebnisse
 - Verständlichkeit
 - Und abschließend die Einbettung der Modelle und ihrer Verwendung in das gesamtgesellschaftliche Risikomanagement und die Prozesse im Unternehmen
- Häufig führt das Versagen einzelner oder mehrerer Punkte aus dieser Liste zu Fehlern.

Die Methoden des QRM müssen dem starken Formalismus der Mathematik folgen, aber die Anwendung im Unternehmen benötigt ein starkes qualitatives Risikomanagement, verbunden mit der kontinuierlichen Überprüfung der Angemessenheit der Daten, Parameter, Methoden und Modelle. Das klingt einfach – aber es ist unglaublich schwierig mit sauberen Prozessen umzusetzen. Trotz aller Kosten sollte ein leichtfüßiges Zusammenspiel von quantitativem Risikomanagement und qualitativem Risikomanagement jedoch im Interesse jedes Unternehmens sein.

Auch wenn Modelle falsch verwendet werden können, kann man auf QRM-Methoden nicht verzichten: die möglichen Analysen und das tiefere Verständnis des Zusammenspiels von Risiken erlauben eine bessere Unternehmenssteuerung.

Das folgende Schema, das Johari-Fenster genannt wird, kann helfen, bei der Risikoerschätzung zu erkennen, wo sich die Probleme befinden. Das obere, linke Feld sollte mit viel Wissen und Informationen gefüllt sein. Die Ecke oben rechts ist gefährlich, weil dort eigene Unkenntnis vorliegt: wir wissen oder verstehen etwas nicht gut genug, obwohl wir es wissen könnten. Dieses Feld sollte sehr klein sein. Die Informationen, die (noch) nicht bekannt sind, aber von denen wir wissen, dass sie herauszufinden sind, befinden sich unten links. Hier könnte man zum Beispiel durch Forschung Lücken schließen und damit das Feld verkleinern, da man Informationen in das darüberliegende Feld „verschiebt“. Es gibt aber noch die sehr gefährliche Ecke unten rechts, die für alles steht, von dem wir noch nicht einmal nicht wissen, dass es uns unbekannt ist.

	Was ich über das Risiko weiß	Was ich über das Risiko nicht weiß
Was vom Risiko bekannt ist	 "known knowns"	 "unknown knowns"
Was vom Risiko unbekannt ist	 "known unknowns"	 "unknown unknowns"

Abbildung 3: Johari-Fenster zu Risikowahrnehmung

Wir werden im Folgenden davon ausgehen, dass wir das wissen, was über die Risiken bekannt ist, also dass wir alle verfügbaren Informationen haben und wir die Fähigkeiten und Erfahrung haben, damit umzugehen.

Die Unsicherheiten, die sich daraus ergeben, dass wir größere Zusammenhänge nicht kennen, dürfen nicht vergessen werden und müssen weiter mitbehandelt werden, zum Beispiel in Form des Modellrisikos. Die „unknown unknowns“¹ können wir aber im quantitativen Risikomanagement nicht behandeln. Es darf nie vergessen werden, dass wir trotzdem mit diesen vier Kategorien leben müssen.

In diesem Kurs werden wir das QRM im Kontext der Finanz- und Versicherungsrisiken erschließen. Selbstverständlich handelt es sich hier nur um ausgewählte Themen, die allerdings ausreichend Einblick und Methoden an die Hand geben sollen, um später Lücken zu schließen, die sich bei vertiefter Betrachtung auftun.

Wir betrachten folgende Bereiche, in ungefähr dieser Abfolge in den Kapiteln dieses Skripts:

- Risikodefinition
- Risikomessung
- Abhängigkeiten von Risiken und Diversifikation
- Empirische Bestimmung und Monte-Carlo-Ansätze
- Die ökonomische Bilanz und das ökonomische Kapital
- Kapitalallokation
- Unternehmenssteuerung und Aufsichtsrecht

Vor den Beginn ist noch eine Wiederholung einer Auswahl von quantitativen Methoden gestellt, die formal nicht notwendig zum Lernumfang dieses Skripts gehört, aber voraussichtlich hilft, in das Thema hineinzukommen und um sicherzustellen, dass wir ähnliche Definitionen verwenden.

Bitte beachten Sie, dass die im Skript präsentierte Theorie wie die Spitze eines Eisberges über mehreren wichtigen mathematischen Bereichen liegt. Wenn Begriffe nicht umfassend definiert werden oder Beweise übersprungen werden, so ist es trotzdem wichtig, dass Sie die Begriffe und Eigenschaften verwenden können und sich des theoretisch korrekten Zusammenhangs bewusst sind, auch wenn er sich nicht vollumfänglich erschließt oder teilweise im Verborgenen bleibt. Dann können Sie im Fall einer notwendigen Vertiefung oder Verifizierung am vorliegenden Material aufsetzen. Aus diesem Grund sind oft die allgemeineren Definitionen und Sätze hier ebenfalls angeführt.

Besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. Dietmar Pfeifer, der diese Kurse entwickelt und bis 2017 gehalten hat. Teile dieses Skripts gehen auf sein Material zurück, und ich bin sehr dankbar, dass ich seine QRM-Vorlesung an der Mathematischen Fakultät und im C3L-Master fortführen darf.

¹ Der Begriff der unknown unknowns wurde von Donald Rumsfeld 2002 in einer Pressekonferenz zum Irakkrieg allgemeiner bekanntgemacht.

KAPITEL 0: EINIGE GRUNDLAGEN

Lernergebnisse des Kapitels

Sie wiederholen und festigen Grundlagen aus dem Kurs zu quantitativen Methoden. Dieses Kapitel können Sie überspringen oder durchblättern, wenn Sie sich sicher fühlen: es gehört nicht zum Lernumfang des eigentlichen QRM-Kurses, sondern ist Voraussetzung dafür.

- Sie kennen den Begriff der Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeit und der Verteilung
- Sie kennen Dichte, Erwartungswert und Varianz
- Sie können mit der gemeinsamen Verteilung zweier Zufallsvariablen arbeiten, und der Summenverteilung
- Der Begriff und die Bedeutung der Korrelation als Abhängigkeitsmaß ist Ihnen bewusst

0 EINIGE GRUNDLAGEN

Wenn wir von Zufall sprechen, haben wir im Kopf, dass die Möglichkeit besteht, dass verschiedene Ereignisse eintreten können, für deren Eintritt wir nicht wissen, ob es eine Regel gibt oder wie diese Regel im genaueren aussieht. Wir können aber beobachten und messen, ob etwas eingetreten ist – und wenn wir ausreichend viele Beobachtungen oder andere Zusatzinformationen haben, können wir den Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Das hilft uns anschließend, mit dem Zufall umzugehen.

In den folgenden Abschnitten möchten wir das Arbeiten mit Verteilungen in Erinnerung rufen.

0.1 Reellwertige Zufallsvariablen und ihre Verteilung

Mathematisch-formal braucht man also eine Menge der möglichen Ereignisse, die wir mit Ω bezeichnen, und eine Menge der Messungen, den sogenannten **Messraum**. Für uns reichen als Messraum die reellen Zahlen, \mathbb{R} , völlig aus. Jedes Ereignis in der Menge Ω hat eine Eintrittswahrscheinlichkeit: Bezeichnen wir die einzelnen Ereignisse mit ω , dann bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses mit $\mathbb{P}(\{\omega\})$, einer Zahl zwischen Null und Eins. Manchmal haben Einzelereignisse die Wahrscheinlichkeit 0, so dass man Mengen von Ereignissen betrachten muss, in Formeln $B \subset \Omega$ und entsprechend $\mathbb{P}(B)$, die Wahrscheinlichkeit, dass irgendein Ereignis aus B eintritt. Wir nennen (Ω, \mathbb{P}) einen **Wahrscheinlichkeitsraum**.²

Schließlich wollen wir jedem Ereignis eine Messung zuordnen, also brauchen wir eine Funktion vom Wahrscheinlichkeitsraum in den Messraum, der jedem Ereignis eine Messung zuordnet. Diese Funktion ist unsere Zufallsvariable.

Definition reellwertige Zufallsvariable

Sei (Ω, \mathbb{P}) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt X reellwertige Zufallsvariable.

Beispiel 2.

Wir betrachten eine zweiseitige Münze mit „Kopf“ und „Zahl“. Der Wahrscheinlichkeitsraum wäre zum Beispiel $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$. Wenn alles mit rechten Dingen zugeht, ist $\mathbb{P}(\{\text{Kopf}\}) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(\{\text{Zahl}\}) = \frac{1}{2}$. Wenn wir Kopf als 1 und Zahl als 0 darstellen, so

² Für den korrekten Formalismus sei erwähnt, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum richtig als Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben ist. \mathcal{F} ist eine σ -Algebra und \mathbb{P} ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{F} . Die Begriffe σ -Algebra und Messbarkeit sind in der axiomatischen Wahrscheinlichkeitstheorie sehr wichtig. Für unseren Einstieg in das QRM soll uns der Hintergrund nicht weiter interessieren und wird für das Skript vernachlässigt. Wenn Sie sich etwas merken wollen, dann dass die Ereignisse, die Sie beobachten wollen, „messbar“ sein müssen.

können wir das Experiment „Ich werfe eine Münze und sage, ob Kopf oder Zahl zu sehen ist“ mit einer Zufallsvariable X darstellen, die das Ergebnis 0 oder 1 annehmen kann. $X(\text{Kopf}) := 1, X(\text{Zahl}) := 0$. Damit ist dann $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = \mathbb{P}(\{\text{Kopf}\}) = \frac{1}{2}$.

Genauso für „Die Münze zeigt Zahl“.

Beispiel 3.

Genauso können wir einen sechsseitigen Würfel modellieren: dort wäre $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ – wenn wir hier schon abkürzen: „1“ heißt das Ereignis „Die Seite mit Zahl 1 liegt oben“. Entsprechend können wir mit X einfach das Ergebnis ablesen: $X(1) := 1, X(2) := 2$ und so weiter. Wenn alle Seiten gleich wahrscheinlich oben liegen können, ist \mathbb{P} wieder die Gleichverteilung und $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}$, und so weiter. Wir können uns auch fragen, wie wahrscheinlich es ist, eine 2 oder eine 4 zu würfeln. Die Antwort wissen wir alle, aber für den Formalismus schreiben wir das gesuchte Ereignis einmal auf: Gesucht ist $\mathbb{P}(\{X \in \{2,4\}\})$.

Beispiel 4.

Wenn wir im vorhergehenden Beispiel die Würfelseite „6“ mit einer „5“ überkleben, haben wir formal immer noch den gleichen Wahrscheinlichkeitsraum, aber das eine Ergebnis ist überklebt. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,5'\}$. Dann setzen wir $X(5') := 5$, also die Auswertung unterscheidet nicht zwischen der „5“ und der aufgeklebten „5“. Rest unverändert. Damit ist $\mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(\{X \in \{5,5'\}\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- Wir können dieses Ergebnis direkt umsetzen und gleich die beiden Seiten identifizieren: $\Omega' = \{1,2,3,4,5\}$. Dann unterscheiden wir schon auf dieser Ebene nicht zwischen der „5“ und der aufgeklebten „5“. Rest unverändert. Hier müssen wir aber auch unsere Wahrscheinlichkeitsverteilung ändern: $\mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{3}$.

In beiden Fällen erhalten wir die gleiche Verteilung der Ergebnisse 1,2,3,4,5.

Oft interessiert der ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsraum also nicht mehr, sondern nur die *Verteilung* auf den Messwerten. Das heißt, wir wollen oft gar nicht wissen, wie der Zufall ausgesehen hat, sondern nur wie wahrscheinlich es ist, dass ein bestimmtes Ereignis beobachtet wird. Im obigen Beispiel des 6-seitigen Würfels, der statt der Zahl 6 eine weitere 5 trägt, hieße das: Wir wollen gar nicht mehr wissen, welche 5 gefallen ist, sondern nur, dass die Zahlen 1,2,3,4 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ fallen, und die Zahl 5 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ fällt (und genau genommen jede andere Zahl außer 1,2,3,4,5 mit Wahrscheinlichkeit 0 als Ergebnis beobachtet werden kann).

Schreiben kann man die Verteilung zum Beispiel so:

$$X = \begin{cases} 1,2,3 \text{ oder } 4 & \text{jeweils mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{6} \\ 5 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{3} \end{cases}$$

Wie Sie sehen, braucht man in dieser Schreibweise den ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraum nicht mehr.

Charakterisiert wird eine Zufallsvariable auch durch ihre *Verteilungsfunktion*:

Definition: Sei X eine Zufallsvariable. Definiere die Funktion F durch $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion heißt *Verteilungsfunktion* zu X .

In unserem vorhergehenden Beispiel 4 sieht die Verteilungsfunktion so aus:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1/6 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1/3 & \text{für } 2 \leq x < 3 \\ 1/2 & \text{für } 3 \leq x < 4 \\ 2/3 & \text{für } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{für } 5 \leq x \end{cases}$$

Die zugehörige grafische Darstellung:

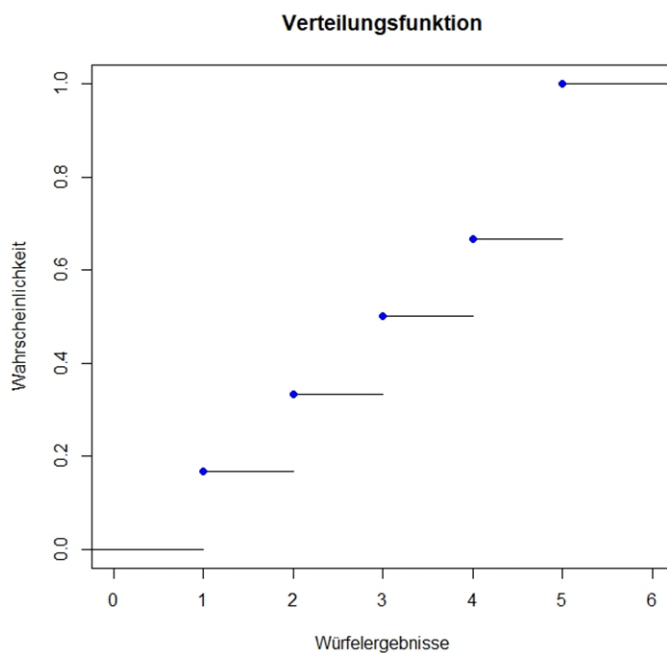


Abbildung 4: Verteilungsfunktion zu Beispiel 4

Beachten Sie bitte die Markierungen an den Sprungstellen: Der dickere Punkt auf dem Graphen bedeutet, dass dieser Funktionswert zu dem Wert auf der x-Achse gehört. Andere, korrekte Darstellungen gibt es mit innen gefüllten Punkten und leeren Punkten oder offenen und geschlossenen Klammern am Graphen oder

Kombinationen davon – in jedem Fall muss erkennbar sein, zu welchem Argument welcher Funktionswert gehört.

Aus einer gegebenen Verteilungsfunktion kann man wiederum Wahrscheinlichkeiten errechnen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X \in]a, b]\}) &= \mathbb{P}(\{X > a, X \leq b\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) = \mathbb{P}(\{X \leq b\}) - \mathbb{P}(\{X \leq a\}) \\ &= F(b) - F(a) \quad (*)\end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $]a, b]$ analog zu obiger, grafischer Darstellung, dass a selbst nicht zum Intervall gehört, b aber schon. Bei der Bezeichnung $[a, b]$ sind a und b im Intervall enthalten. Der Schrägstrich \setminus bedeutet, ähnlich der Subtraktion, dass die zweite Menge von der ersten entfernt wird. Die Schreibweise $\{X \in]a, b]\}$ ist eine Abkürzung für $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in]a, b]\}$. Hier sehen Sie, dass man sich auch in der Schreibweise symbolisch nicht mehr mit den „Urbildern“ beschäftigt, sondern nur mit der Frage, ob und wann Messergebnisse des Experiments in der Menge $]a, b]$ liegen, und nicht, warum. Im Folgenden werden manchmal die Klammern $\{\cdot\}$ auch weggelassen, also schreiben wir $\mathbb{P}(\{X \in]a, b]\})$ alternativ als $\mathbb{P}(X \in]a, b])$.

Für unser obiges Beispiel wiederum fragen wir uns: wie wahrscheinlich ist es, dass das Ergebnis im Intervall $]2, 4]$ liegt. Überlegung vorab: Da 2 nicht im Intervall liegt, sind nur die Würfelergebnisse 3 und 4 zulässig, also erwarten wir ohne jeden Formalismus einfach $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ als Antwort.

Formal gerechnet: $\mathbb{P}(\{X \in]2, 4]\}) = F(4) - F(2) = 2/3 - 1/3 = 1/3$.

Sie sehen hier, dass es wesentlich ist, wo die Sprungstelle ist, und daher ist die genaue Bezeichnung in den Formeln, mit $<$ und \leq materiell wichtig, und analog die offenen und geschlossenen Punkte in der graphischen Darstellung.

Eine Bitte:

Wenn Sie Excel oder andere Tools für graphische Darstellung von Funktionen mit Sprungstellen verwenden, werden bei Sprungstellen oft senkrechte Elemente in den Graphen hinzugefügt. Verwenden Sie diese Darstellungen bitte niemals, außer Sie haben einen guten Grund. Wie können Sie am Graphen dann erkennen, welcher Funktionswert zum Wert auf der x -Achse gehört? Formal gesehen sind diese Darstellungen auch keine Funktionen. Wir gehen auf die Schwierigkeit der Sprungstellen später nochmals ein.

